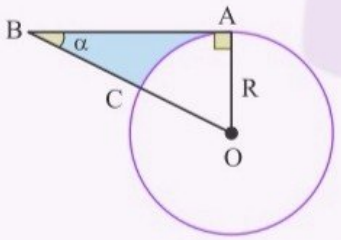
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضی**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **تجربی**	**پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۵ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

۱ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} + ۷x = \sqrt{۲x^{۲} + ۱۰x + ۱۲} + ۲x - ۶$ را بیابید.

۲ در شکل زیر O مرکز دایره و R شعاع دایره است. محیط و مساحت قسمت رنگی را برحسب R و α به دست آورید. (α برحسب رادیان است)

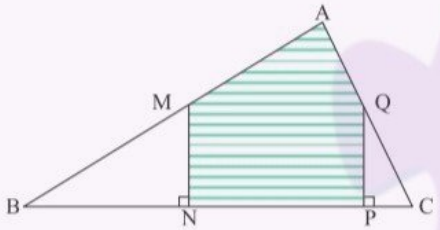


۳ اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱\ ,\ ۲)$ از خط $ax + ۴y = ۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

۴ $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند که این مربع در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است. مختصات رئوس C و D را به دست آورید.

۵ برد تابع $y = \sin^۲ x + ۴\sin x + ۶$ را محاسبه کنید.

۶ در شکل زیر، نقاط M و Q وسط‌های AB و AC است. مساحت ناحیهٔ رنگی، چه کسری از مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است؟



معادلات زیر را حل کنید.

۷

$$(x-\sqrt{x^{۲}-۴})^{۴}(x+\sqrt{x^{۲}-۴})^{۲}=۱۶$$

۸

$$(\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}})^{x}+(\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}})^{x}=۶$$

۹ معادلهٔ زیر را حل کنید.

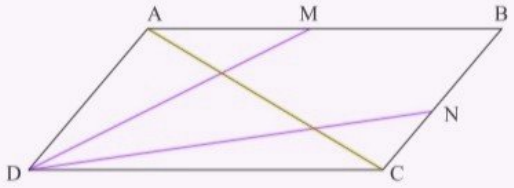
$$\sqrt{x-۱}+\frac{۹}{\sqrt{x-۱}+۲}=۴$$

۱۰ فاصلهٔ بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند، ۳۲۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از هشت ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت‌زمان کل برابر ۲۹ ساعت می‌باشد. اگر سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۹ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جهت جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در هر دو مسیر مشخص کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۱ نقاط M و N وسط‌های اضلاع AB و AC از مثلث ABC است. نسبت مساحت مثلث AMN به چهار ضلعی MNCB را بیابید.

۱۲ در متوازی‌الاضلاع زیر، نقاط M و N وسط‌های AB و BC است. ثابت کنید DM و DN، قطر AC را به سه پاره‌خط مساوی، تقسیم کرده‌اند.



۱۳ در مثلث ABC از A عمودهای AM و AN را بر نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

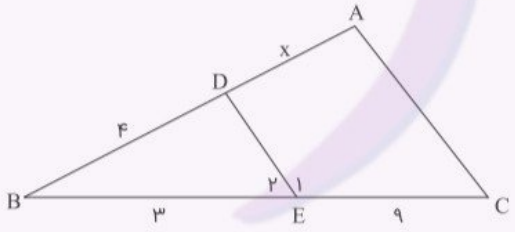
الف MN با BC موازی است.

ب MN از وسط AB و AC می‌گذرد.

پ طول MN نصف محیط مثلث ABC است.

۱۴ ثابت کنید اگر اضلاع مثلثی با معکوس ارتفاع‌های مثلث دیگری متناسب باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

۱۵ در شکل زیر دو زاویهٔ مقابل چهار ضلعی مکمل‌اند. اندازهٔ x را بیابید.



پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۶ در ذوزنقهٔ ABCD ($AB \parallel CD$) از محل برخورد قطرها (O) دو خط به موازات ساق‌ها رسم کرده‌ایم تا قاعدهٔ DC را در C' و D' قطع کنند ($OC' \parallel BC$, $OD' \parallel AD$). ثابت کنید: $DD' = CC'$

۱۷ به ازای کدام بازه از a، تابع زیر یک‌به‌یک است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۳x + ۲a & ; x < ۰ \\ -۲x + ۳ & ; x \geq ۰ \end{cases}$$

۱۸ در مثلث ABC ثابت کنید اگر $\hat{A} = ۲\hat{B}$، آنگاه $a^{۲} = b(b+c)$.

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱۹ $(\cos ۷۵۰^\circ - \sin ۷۵۰^\circ)(\cos ۶۹۰^\circ - \sin ۶۹۰^\circ)$

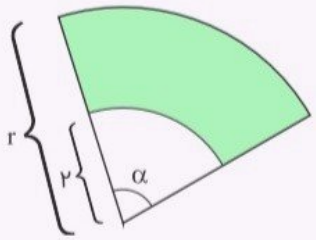
۲۰ $۲\cos ۶۷۸^\circ + \cos ۲۲۲^\circ + \cos ۱۵۵^\circ + \sin ۱۱۵^\circ - \cos ۴۰۲^\circ$

۲۱ $\sin ۱۰۵^\circ + \cos ۱۹۵^\circ + \sin ۷۵^\circ - \cos ۳۴۵^\circ$

۲۲ $۳\sqrt{۳}\tan ۳۹۰^\circ \cos ۳۰۰^\circ \cot ۱۳۵^\circ - \cos ۱۲۰^\circ \cos(-۶۹۰^\circ)\sin(-۴۲۰^\circ)$

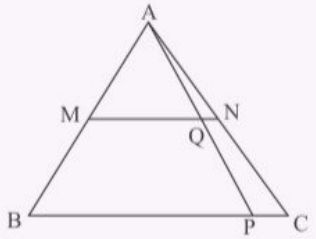
۲۳ معادلهٔ $\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{x+۱}} = \frac{x-۱}{۲}$ را حل کنید.

۲۴ اگر محیط قسمت رنگی ۱۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۱۰/۵ سانتی‌متر مربع باشد، r و α را حساب کنید.



۲۵ معادلهٔ $\sqrt{۴x^۲ - ۸x - ۳} = ۲x^۲ - ۴x - ۳$ را حل کنید.

۲۶ در مثلث ABC خط MN موازی BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۳}$، همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۴}$ است. $S(AQN)$ چه کسری از مساحت ABC است؟



پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

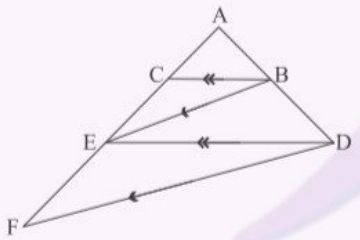
۲۷ می‌دانیم α و β دو ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^{۲} + mx + ۵ = ۰$ هستند و ۵، $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ به‌ترتیب تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. مقدار m را به دست آورید.

۲۸ برد تابع $f(x) = ۲\sin^{۲}x + ۵\cos^{۲}x + ۱$ را به دست آورید.

۲۹ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$x^{۴} + ۲x^{۳} - x^{۲} + ۲x + ۱ = ۰$$

۳۰ در شکل زیر ثابت کنید: $AE^{۲} = AC \times AF$



۳۱ فرض کنید خط $y - \frac{۱}{۲}nx + ۲ = ۰$ بر خط‌های $y - (۳ - m)x = -۱$ و $y = (۲m - ۸)x + ۵$ عمود باشد. در این صورت مقادیر m و n را به دست آورید.

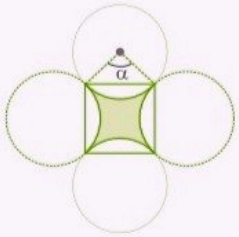
۳۲ به ازای کدام مقدار برای m، هر دو جواب معادلهٔ $۲x^۲ - ۲mx + m^۲ - m = ۰$، معکوس یکدیگرند؟

۳۳ مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول وتر آن $۴\ cm$ و طول یک ضلع زاویه قائمه آن $۲\ cm$ باشد. (شکل و توضیح)

۳۴ نقاطی را بر روی خط $y = x - ۳$ بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از خط $y - ۴x = ۳$ برابر با $\sqrt{۱۷}$ باشد.

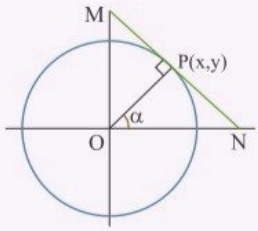
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۵ در شکل زیر، شعاع هر چهار دایره برابر با ۲ است. اگر $\alpha = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت قسمت رنگی را حساب کنید.



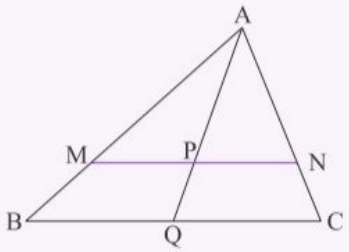
۳۶ خط MN در نقطهٔ $P(x, y)$ بر دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر مماس شده است. نشان دهید:

$$PN + PM = ON.OM$$



۳۷ نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۲۱ باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ‌تر چند است؟ نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به محیط مثلث کوچک‌تر را به دست آورید.

۳۸ در شکل زیر، $MN \parallel BC$، $\frac{AM}{MB} = \frac{۵}{۲}$ و $\frac{BQ}{QC} = \frac{۳}{۲}$. مساحت هریک از چهار ناحیهٔ داخل مثلث ABC را برحسب مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ بیابید.



۳۹ یک‌به‌یک بودن تابع $f(x) = ۲ - \frac{۱}{x+۱}$ را بررسی کنید.

۴۰ مقدار عبارت $\frac{۱}{۱+\cot^۲ ۱^\circ} + \frac{۱}{۱+\cot^۲ ۲^\circ} + \dots + \frac{۱}{۱+\cot^۲ ۸۹^\circ}$ را به دست آورید.

۴۱ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲ + ۴x - ۳ = ۰$ باشند، بدون حل معادله حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف

$$\frac{۲\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

ب

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$$

۴۲ اعداد زیر را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید (کمان ۱ برحسب رادیان است).

$$\tan ۱,\ \cot ۱,\ \tan ۱^{\tan ۱},\ \cot ۱^{\cot ۱},\ \tan ۱^{\cot ۱},\ \cot ۱^{\tan ۱}$$

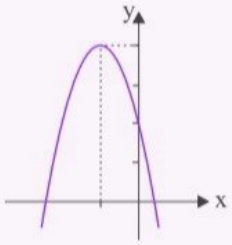
۴۳ ریشه‌های معادلهٔ زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{x^۲-۲x-۳}+\sqrt{x^۴-۳x^۳-x^۲+۹}=۰$$

۴۴ اگر α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۷x+۴=۰$ باشد، حاصل $-\frac{۴}{\alpha}-\alpha^۲$ را به دست آورید.

۴۵ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x + ۱ & ; ۰ \leq x < \pi \\ ۲\sin x + ۱ & ; \pi < x \leq ۲\pi \end{cases}$ را رسم کنید.

۴۶ نمودار سهمی $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. جواب‌های معادلهٔ $f(x)^۲ + ۱۲f(x) = ۲۸$ را به دست آورید. (هر فاصله را یک واحد روی محور در نظر بگیرید)



۴۷ نقاط $A(۲, k)$ و $B(-۱, -۱)$ و $C(۴, ۱)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر طول میانهٔ BM برابر با ۵ باشد، k چه اعدادی می‌تواند باشد؟

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱

$$x^۲ + ۷x = \sqrt{۲x^۲ + ۱۰x + ۱۲} + ۲x - ۶$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۷x - ۲x + ۶ = \sqrt{۲x^۲ + ۱۰x + ۱۲}$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۵x + ۶ = \sqrt{۲(x^۲ + ۵x + ۶)}$$
$$\xrightarrow{x^۲+۵x+۶=t} t = \sqrt{۲t} \Rightarrow t^۲ - ۲t = ۰ \Rightarrow t(t-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = ۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ + ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow P = \frac{c}{a} = ۶ \\ x^۲ + ۵x + ۶ = ۲ \Rightarrow x^۲ + ۵x + ۴ = ۰ \Rightarrow P = \frac{c}{a} = ۴ \end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله، ۲۴ است.

۲ در مثلث OAB می‌نویسیم:

$$\tan B = \frac{OA}{AB} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{R}{AB} \Rightarrow AB = \frac{R}{\tan\alpha} = R\cot\alpha$$
$$\sin B = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{R}{OB} \Rightarrow OB = \frac{R}{\sin\alpha} \Rightarrow BC = \frac{R}{\sin\alpha} - R$$

ازطرفی طول کمان AC برابر است با:

$$\overset{\frown}{AC} = R \times A\hat{O}C = R(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$$

پس محیط ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$AB + BC + \overset{\frown}{AC} = R\cot\alpha + \frac{R}{\sin\alpha} - R + R(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$$
$$= R(\cot\alpha + \frac{۱}{\sin\alpha} + \frac{\pi}{۲} - \alpha - ۱)$$

برای تعیین مساحت قسمت رنگی داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{AB \times OA}{۲} = \frac{R\cot\alpha \times R}{۲} = \frac{R^۲}{۲}\cot\alpha$$
$$S_{\text{قطاع}OAC} = \frac{۱}{۲}.R^۲(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = R^۲(\frac{\pi}{۴} - \frac{\alpha}{۲})$$

پس مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$\frac{R^۲}{۲}\cot\alpha - R^۲(\frac{\pi}{۴} - \frac{\alpha}{۲}) = \frac{R^۲}{۲}(\cot\alpha + \alpha - \frac{\pi}{۲})$$

۳

$$ax + ۴y - ۱ = ۰$$

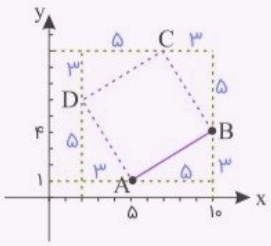
$$۲ = \frac{|a + ۸ - ۱|}{\sqrt{a^۲ + ۱۶}} \Rightarrow ۴a^۲ + ۶۴ = (a + ۷)^۲$$

$$۴a^۲ + ۶۴ - a^۲ - ۱۴a - ۴۹ = ۰$$

$$۳a^۲ - ۱۴a + ۱۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۹۶ - \overbrace{۴(۴۵)}^{۱۸۰} = ۱۶$$

$$a = \frac{۱۴ \pm ۴}{۶} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱۸}{۶} = ۳ \\ \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳} \end{cases}$$

۴ نقاط A و B را در صفحهٔ مختصات مشخص می‌کنیم:



چهار مثلثی که در کنار اضلاع مربع تشکیل شده‌اند، همنهشت هستند.

$$\begin{cases} y_D = y_A + ۵ = ۶ \\ x_D = x_A - ۳ = ۲ \end{cases} \Rightarrow D(۲, ۶)$$

$$\begin{cases} y_C = y_B + ۵ = ۹ \\ x_C = x_B - ۳ = ۷ \end{cases} \Rightarrow C(۷, ۹)$$

۵

$$y = (\sin x + ۲)^۲ + ۲$$

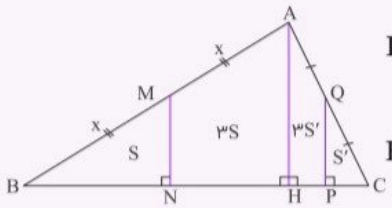
$$\sin x = -۱ \Rightarrow y_{min} = ۳$$

$$\sin x = ۱ \Rightarrow y_{max} = ۱۱$$

$$R = [۳, ۱۱]$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۶ با رسم ارتفاع AH، داریم:



$$\hat{B}=\hat{B},\hat{N}=\hat{H}_۱ \Rightarrow B\overset{\Delta}{N}M \sim B\overset{\Delta}{H}A \Rightarrow \frac{S_{B\overset{\Delta}{N}M}}{S_{B\overset{\Delta}{H}A}}=\left(\frac{BM}{BA}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$B\overset{\Delta}{N}M=S \Rightarrow S_{B\overset{\Delta}{H}A}=۴S \Rightarrow S_{AMNH}=۳S$$

به روش مشابه $\Rightarrow S_{C\overset{\Delta}{P}Q}=S', S_{C\overset{\Delta}{H}A}=۴S' \Rightarrow S_{AQPH}=۳S'$

$$\frac{S_{AMNPQ}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}}=\frac{۳S+۳S'}{۴S+۴S'}=\frac{۳(S+S')}{۴(S+S')}=\frac{۳}{۴}$$

پاسخ سؤالات ۷ تا ۸

۷

$$\underbrace{(x-\sqrt{x^۲-۴})^۲(x+\sqrt{x^۲-۴})^۲}(x-\sqrt{x^۲-۴})^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow (x^۲-x^۲+۴)^۲(x-\sqrt{x^۲-۴})^۲=۱۶ \Rightarrow ۱۶(x-\sqrt{x^۲-۴})^۲=۱۶ \Rightarrow (x-\sqrt{x^۲-۴})^۲=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x^۲-۴}=۱ \Rightarrow \sqrt{x^۲-۴}=x-۱ \xrightarrow{x\geq ۱} x^۲-۴=x^۲-۲x+۱ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲} \\ x-\sqrt{x^۲-۴}=-۱ \Rightarrow \sqrt{x^۲-۴}=x+۱ \xrightarrow{x\geq -۱} x^۲-۴=x^۲+۲x+۱ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۸ می‌دانیم $\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۹-۸}=۱$، یعنی دو عبارت سمت چپ معکوس یکدیگرند.
پس قرار می‌دهیم $(\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}})^x=t$ و داریم:

$$t+\frac{۱}{t}=۶ \xrightarrow{\times t} t^۲-۶t+۱=۰$$

$$t=\frac{۶\pm\sqrt{۳۶-۴}}{۲}=\frac{۶\pm۴\sqrt{۲}}{۲}=۳\pm۲\sqrt{۲}$$

$$(\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}})^x=۳-۲\sqrt{۲} \Rightarrow \left(۳-۲\sqrt{۲}\right)^{\frac{x}{۲}}=۳-۲\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲}=۱ \Rightarrow x=۲$$

$$(\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}})^x=۳+۲\sqrt{۲} \Rightarrow (۳-۲\sqrt{۲})^{\frac{x}{۲}}=(۳-۲\sqrt{۲})^{-۱} \Rightarrow \frac{x}{۲}=-۱ \Rightarrow x=-۲$$

دقت کنید چون دو عدد معکوس یکدیگرند، داریم: $(۳+۲\sqrt{۲})=(۳-۲\sqrt{۲})^{-۱}$

۹ تغییر متغیر:

$$\sqrt{x-۱}+۲=A$$

$$A-۲+\frac{۹}{A}=۴ \Rightarrow A+\frac{۹}{A}=۶$$

$$\Rightarrow A^۲-۶A+۹=۰ \Rightarrow (A-۳)^۲=۰ \Rightarrow A=۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-۱}+۲=۳ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۱ \Rightarrow x=۲$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۰ اگر سرعت حرکت کشتی در خلاف جریان آب را v بگیریم، سرعت در جهت جریان $v+۹$ است.

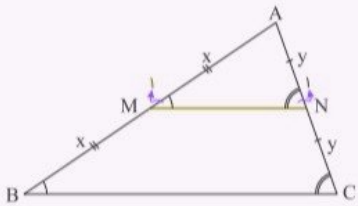
$$t = \text{مدت‌زمان رفت} + \text{مدت‌زمان توقف} + \text{مدت‌زمان برگشت}$$

$$\Rightarrow ۲۹ = \frac{۳۲۴}{v} + ۸ + \frac{۳۲۴}{v+۹} \Rightarrow \frac{۳۲۴}{v} + \frac{۳۲۴}{v+۹} = ۲۱ \Rightarrow \frac{\cancel{۳۲۴}(۲v+۹)}{v(v+۹)} = \cancel{۲۱}$$

$$\Rightarrow ۱۰۸(۲v+۹) = ۷v(v+۹) \Rightarrow ۷v^۲ - ۱۵۳v - ۹۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow v = \frac{۱۵۳ \pm \sqrt{۱۵۳^۲ - ۴(۷)(-۹۷۲)}}{۱۴} = \frac{۱۵۳ \pm ۲۲۵}{۱۴} \Rightarrow v = \begin{cases} ۲۷ \\ \frac{-۷۲}{۱۴} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases} \Rightarrow v = ۲۷, v+۹ = ۳۶$$

۱۱

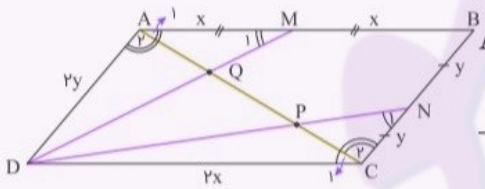


$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B}, \hat{N}_۱ = \hat{C} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}N \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \ (*)$$

$$S_{A\overset{\Delta}{M}N} = S \xrightarrow{(*)} S_{A\overset{\Delta}{B}C} = ۴S \Rightarrow S_{MNCB} = ۴S - S = ۳S \Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{MNCB}} = \frac{S}{۳S} = \frac{۱}{۳}$$

۱۲ طول اضلاع متوازی‌الاضلاع را $۲x$ و $۲y$ فرض می‌کنیم. حال داریم:



$$AM \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{M}_۱ = Q\hat{D}C \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}Q \underset{(زز)}{\sim} C\overset{\Delta}{D}Q \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{DC} =$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AQ}{AQ+QC} = \frac{۱}{۱+۲} \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow AQ = \frac{۱}{۳}AC \quad (*)$$

$$CN \parallel DA \Rightarrow \hat{C}_۲ = \hat{A}_۲, \hat{N}_۱ = P\hat{D}A \Rightarrow C\overset{\Delta}{N}P \underset{(زز)}{\sim} A\overset{\Delta}{D}P \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{CN}{AD} =$$

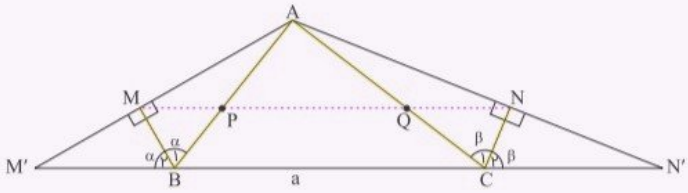
$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CP}{CP+PA} = \frac{۱}{۱+۲} \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow CP = \frac{۱}{۳}AC \quad (**)$$

$$QP = AC - AQ - CP \xrightarrow{(*),(**)} QP = AC - \frac{۱}{۳}AC - \frac{۱}{۳}AC = \frac{۱}{۳}AC$$

$$\Rightarrow AQ = QP = PC = \frac{۱}{۳}AC$$

۱۳

الف AM و AN را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در M' و N' قطع کند. حال داریم:



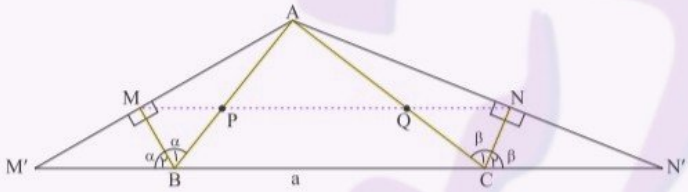
$$\begin{cases}\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \\ BM = BM \\ A\hat{M}B = M'\hat{M}B = ۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}B \cong M'\overset{\Delta}{M}B \Rightarrow AM = MM', AB = BM'$$

به روش مشابه:

$$\Rightarrow AN = NN', AC = CN'$$

$$A\overset{\Delta}{M'}N' : \frac{AM}{MM'} = \frac{AN}{NN'} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel M'N' \Rightarrow MN \parallel BC$$

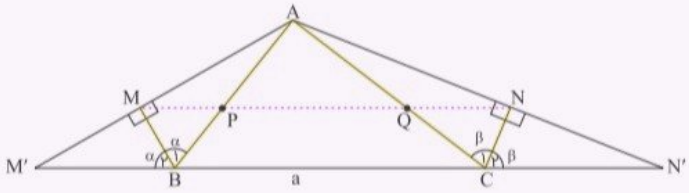
ب



$$A\overset{\Delta}{B}M' : MP \parallel M'B \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MM'} = ۱ \Rightarrow AP = PB$$

درنتیجه P وسط AB است و به روش مشابه Q وسط AC است.

پ



$$MN \parallel M'N' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{M'N'} = \frac{AM}{AM'} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{\underbrace{M'B}_{AB} + BC + \underbrace{CN'}_{AC}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN = \frac{۱}{۲}\left(\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) \text{ محیط}\right)$$

۱۴ اضلاع مثلث ABC را a، b و c و اضلاع مثلث $A'B'C'$ را a'، b' و c' می‌نامیم. فرض کنید اضلاع مثلث ABC با معکوس ارتفاع‌های مثلث $A'B'C'$ متناسب‌اند، یعنی:

$$\frac{a}{\frac{۱}{h_{a'}}} = \frac{b}{\frac{۱}{h_{b'}}} = \frac{c}{\frac{۱}{h_{c'}}}$$

حال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a'h_{a'} = b'h_{b'} \Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{h_{b'}}{h_{a'}} \\ \frac{a}{\frac{۱}{h_{a'}}} = \frac{b}{\frac{۱}{h_{b'}}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{۱}{h_{a'}}}{\frac{۱}{h_{b'}}} = \frac{h_{b'}}{h_{a'}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

به روش مشابه داریم:

$$\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

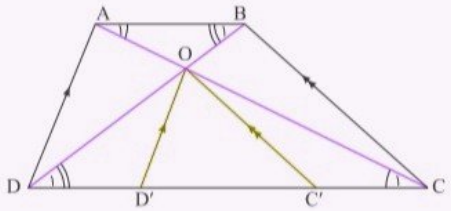
۱۵

$$\begin{cases} A + E_۱ = ۱۸۰ \\ E_۱ + E_۲ = ۱۸۰ \end{cases} \Rightarrow \cancel{E_۱} + A = \cancel{E_۱} + E_۲$$

$$ABC \sim BDE \Rightarrow \begin{cases} A = E_۲ \\ B = B \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED} = \frac{AB}{EB}$$

$$\frac{۱۲}{۴} = \frac{۴ + x}{۳} \Rightarrow x = ۵$$

۱۶



$$\overset{\Delta}{CAD} : D'O \parallel DA \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{D'D}{CD} = \frac{OA}{AC} \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{DCB} : C'O \parallel CB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{C'C}{CD} = \frac{OB}{BD} \quad (**)$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \underset{(زز)}{\sim} \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OA}{OA + OC} = \frac{OB}{OB + OD} \Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$$

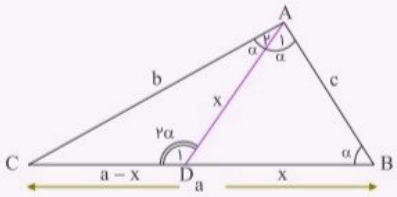
$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{D'D}{CD} = \frac{C'C}{CD} \Rightarrow D'D = C'C$$

۱۷

تابع یک‌به‌یک است و عرض از مبدأ آن به ازای $x \geq ۰$، ۳ می‌باشد. تابع $x^۲ - ۳x + ۲a$ دارای طول رأس سهمی $\frac{۳}{۲}$ و دهانهٔ سهمی روبه‌بالا می‌باشد. پس فقط کافی است $x^۲ - ۳x + ۲a$ به ازای $x = ۰$، بزرگ‌تر مساوی از $-۲x + ۳$ به ازای $x = ۰$ باشد.

$$x^۲ - ۳x + ۲a \geq -۲x + ۳ \Rightarrow ۲a \geq ۳ \Rightarrow a \geq \frac{۳}{۲}$$

۱۸ فرض کنیم $\hat{A} = ۲\alpha$ و $\hat{B} = \alpha$. با رسم نیمساز $\hat{A}$، داریم:



$$D\overset{\Delta}{A}B : \hat{B} = \hat{A}_۱ \Rightarrow DB = DA = x \Rightarrow CD = a - x$$

$\hat{D}_۱$ زاویهٔ خارجی $D\overset{\Delta}{A}B$ است:

$$\Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B} = ۲\alpha$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{D}_۱ = \hat{A} \\ \hat{A}_۲ = \hat{B}\end{matrix}\right\} \Rightarrow D\overset{\Delta}{A}C \underset{(\text{زز})}{\sim} A\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-x}{b} = \frac{x}{c} \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{b}{a} = \frac{a-x+x}{b+c} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b+c}$$

$$\Rightarrow a^۲ = b(b+c)$$

پاسخ سؤالات ۱۹ تا ۲۲

۱۹

$$(\cos ۷۵۰^\circ - \sin ۷۵۰^\circ)(\cos ۶۹۰^\circ - \sin ۶۹۰^\circ)$$
$$= (\cos(۴\pi + ۳۰) - \sin(۴\pi + ۳۰^\circ))(\cos(۴\pi - ۳۰) - \sin(۴\pi - ۳۰))$$
$$= (\cos ۳۰^\circ - \sin ۳۰^\circ)(\cos ۳۰^\circ + \sin ۳۰^\circ) = \cos^۲ ۳۰^\circ - \sin^۲ ۳۰^\circ$$
$$= \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۲۰

$$۲\cos ۶۷۸^\circ + \cos ۲۲۲^\circ + \cos ۱۵۵^\circ + \sin ۱۱۵^\circ - \cos ۴۰۲^\circ$$
$$= ۲\cos(۷۲۰^\circ - ۴۲^\circ) + \cos(۱۸۰^\circ + ۴۲^\circ) + \cos(۱۸۰^\circ - ۲۵^\circ) + \sin(۹۰^\circ + ۲۵^\circ) - \cos(۳۶۰^\circ + ۴۲^\circ)$$
$$= ۲\cos ۴۲^\circ - \cos ۴۲^\circ - \cos ۲۵^\circ + \cos ۲۵^\circ - \cos ۴۲^\circ = ۰$$

۲۱

$$\sin ۱۰۵^\circ + \cos ۱۹۵^\circ + \sin ۷۵^\circ - \cos ۳۴۵^\circ$$
$$= \sin(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) + \cos(۱۸۰^\circ + ۱۵^\circ) + \sin(۹۰^\circ - ۱۵^\circ) - \cos(۳۶۰^\circ - ۱۵^\circ)$$
$$= \cos ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ + \cos ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ = ۰$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۲

$$۳\sqrt{۳}\tan ۳۹۰^\circ \cos ۳۰۰^\circ \cot ۱۳۵^\circ - \cos ۱۲۰^\circ \cos(-۶۹۰^\circ)\sin(-۴۲۰^\circ)$$
$$= ۳\sqrt{۳}\tan(۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ)\cos(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ)\cot(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) - \cos(۹۰^\circ + ۳۰^\circ)\cos(۷۲۰^\circ - ۳۰^\circ)(-\sin(۳۶۰^\circ + ۶۰^\circ))$$
$$= ۳\sqrt{۳}\tan ۳۰^\circ \times \cos ۶۰^\circ \times (-\tan ۴۵^\circ) + \sin ۳۰^\circ \cos ۳۰^\circ \sin ۶۰^\circ$$
$$= ۳\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times (-۱) + \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$= -۳ \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} = -\frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۸} = \frac{-۹}{۸}$$

۲۳

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱} \times \frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱} = \frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱} = \sqrt{۲}-۱$$
$$\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۳-۲} = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$
$$\frac{۱}{\sqrt{۴}+\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}}{۴-۳} = \sqrt{۴}-\sqrt{۳}$$
$$\vdots$$
$$\frac{۱}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}}{x+۱-x} = \sqrt{x+۱}-\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+۱}-۱ = \frac{x-۱}{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}-۲ = x-۱$$
$$\Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}-(x+۱) = ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۱}(۲-\sqrt{x+۱}) = ۰$$
$$\begin{cases} \sqrt{x+۱} = ۰ \Rightarrow x = -۱ \quad \text{غ.ق.ق} \\ ۲-\sqrt{x+۱} = ۰ \Rightarrow ۲ = \sqrt{x+۱} \Rightarrow x+۱ = ۴ \Rightarrow x = ۳ \quad \text{ق.ق} \end{cases}$$

درنتیجه $x = ۳$ جواب معادله است.

۲۴ قسمت رنگی، ناحیه‌ای بین دو قطاع است. ابتدا طول کمان‌ها را به دست می‌آوریم. فرض کنیم طول کمان کوچک‌تر L و کمان بزرگ‌تر L' باشد.

$$L = r.\alpha \Rightarrow L = ۲\alpha\,,\ L' = r\alpha$$
$$\text{محیط رنگی} = ۲\alpha + r\alpha + ۲(r-۲)$$
$$\Rightarrow \alpha(r+۲) + ۲(r-۲) = ۱۳ \quad (۱)$$
$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲}r^۲\alpha \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۲^۲\alpha = ۲\alpha \quad , \quad S'_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲} \times r^۲\alpha = \frac{۱}{۲}r^۲\alpha$$
$$S_{\text{رنگی}} = \frac{۱}{۲}r^۲\alpha - ۲\alpha = ۱۰/۵ \xrightarrow{\times ۲} r^۲\alpha - ۴\alpha = ۲۱$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{۲۱}{r^۲-۴} \quad (۲)$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۲۱(r+۲)}{(r-۲)(r+۲)} + ۲(r-۲) = ۱۳$$
$$\Rightarrow ۲(r-۲)^۲ - ۱۳(r-۲) + ۲۱ = ۰$$
$$r-۲ = \frac{۷}{۲} \Rightarrow r = ۵/۵ \xrightarrow{(۲)} \alpha = \frac{۲۱}{۲۶/۲۵} = ۰/۸$$
$$r-۲ = ۳ \Rightarrow r = ۵ \xrightarrow{(۲)} \alpha = ۱$$

۲۵ با فرض $2x^2 - 4x - 3 = t$، داریم:

$$2x^2 - 4x = t + 3$$

معادلهٔ اولیه را کمی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sqrt{4x^2 - 8x - 3} = 2x^2 - 4x - 3 \Rightarrow \sqrt{2(2x^2 - 4x) - 3} = 2x^2 - 4x - 3$$

حال به جای $2x^2 - 4x$، عبارت $t + 3$ را قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{2(t+3) - 3} = t \Rightarrow \sqrt{2t + 3} = t$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \ \times \\ t = 3 \ \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید $t = -1$ در معادله صدق نمی‌کرد.
حال عبارتی که t گرفته بودیم را برابر با ۳ قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - 4x - 3 = 3 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

۲۶

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{PC}{PB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{1}{5}$$
$$QN || PC \Rightarrow AQN \sim APC$$
$$\frac{S(AQN)}{S(APC)} = \left(\frac{AN}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

در دو مثلث APC و ABC قاعده‌های PC و BC از آن‌ها بر یک امتداد است، پس از رأس مشترک A ارتفاعشان یکی است.

$$\frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{PC}{BC} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{S(AQN)}{S(APC)} \times \frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{80}$$

۲۷ اگر ۵، $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، آنگاه:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha\beta)(5)$$

ازطرفی داریم: $P = 5$ و $S = -m$

$$\Rightarrow (-m)^2 = 5 \times 5 \Rightarrow m = \pm 5$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = 5 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = 0 \quad \Delta > 0 \,,\ S < 0 \,,\ P > 0 \\ m = -5 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \quad \Delta > 0 \,,\ S > 0 \,,\ P > 0 \end{cases}$$

باتوجه‌به شرط مسأله، مبنی بر دو ریشهٔ مثبت، $m = -5$ قابل‌قبول است.

۲۸

$$f(x) = ۲\sin^۲ x + ۵\cos^۲ x + ۱ = ۲\sin^۲ x + ۲\cos^۲ x + ۳\cos^۲ x + ۱$$

$$= ۲ + ۳\cos^۲ x + ۱ = ۳\cos^۲ + ۳$$

$$-۱ \leq \cos x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \cos^۲ x \leq ۱$$

$$\Rightarrow ۰ \leq \cos^۲ x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq ۳\cos^۲ x \leq ۳ \Rightarrow ۳ \leq ۳\cos^۲ x + ۳ \leq ۶$$

$$R_f = [۳, ۶]$$

۲۹ دو طرف را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۴ + ۲x^۳ - x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱ + \frac{۲}{x} + \frac{۱}{x^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + ۲(x + \frac{۱}{x}) - ۱ = ۰$$

$$x + \frac{۱}{x} = t \Rightarrow t^۲ - ۲ + ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \text{ یا } -۳$$

$$x + \frac{۱}{x} = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۱ = x \Rightarrow x^۲ - x + ۱ = ۰ \quad \text{جواب ندارد}$$

$$x + \frac{۱}{x} = -۳ \Rightarrow x^۲ + ۱ = -۳x \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

۳۰

$$\left.\begin{array}{l} BC||DE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \\ BE||DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^۲ = AC \times AF$$

۳۱ برای اینکه خط موردنظر بتواند بر هر دو خط داده‌شده عمود باشد می‌بایست این دو خط باهم موازی باشند پس شیب‌های این دو خط باهم برابرند.

$$۲m - ۸ = ۳ - m \Rightarrow ۳m = ۱۱ \Rightarrow m = \frac{۱۱}{۳}$$

m را در هر یک از دو معادله داده‌شده قرار می‌دهیم

$$y = (۲ \times \frac{۱۱}{۳} - ۸)x + ۵ \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x + ۵$$

$$y = (۳ - \frac{۱۱}{۳})x - ۱ \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x - ۱$$

حال باتوجه‌به اینکه خط $y - \frac{۱}{۲}nx + ۲ = ۰$ بر خطوط موازی داده‌شده عمود است پس شیب آن قرینه و معکوس شیب این خطوط یعنی $\frac{۳}{۲}$ است.

$$y = \frac{۱}{۲}nx - ۲ \Rightarrow m' = \frac{۱}{۲}n = \frac{۳}{۲} \Rightarrow n = ۳$$

۳۲

$$۲x^۲ - ۲mx + (m^۲ - m) = ۰ \Rightarrow x^۲ - mx + (\frac{m^۲ - m}{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = ۱ \Rightarrow \frac{m^۲ - m}{۲} = ۱ \Rightarrow m^۲ - m = ۲ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۹}}{۲} = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -۱ \end{cases}$$

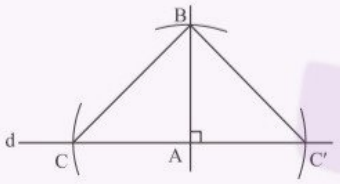
حال هر دو جواب را در معادلهٔ صورت سوال جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = ۲ : ۲x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \\ m = -۱ : ۲x^۲ + ۲x = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین مقداری برای m یافت نشد.

۳۳

۱ـ نقطه A را بر روی خط d در نظر گرفته و از آن خطی عمود می‌کنیم.
۲ـ به مرکز A و شعاع۲cm کمانی می‌زنیم تا خط عمود را در نقطه B قطع کند.
۳ـ به مرکز B و شعاع۴cm کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه C و C' قطع کند.
هر یک از مثلث‌های ABC و ABC' جواب‌های مسئله هستند.



۳۴

نقاط روی خط $y = x - ۳$ را به صورت پارامتری می‌نویسیم و سپس فاصلهٔ این نقاط را از خط $y - ۴x = ۳$ برابر $\sqrt{۱۷}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-۴(\alpha) + ۱(\alpha - ۳) - ۳|}{\sqrt{۱ + ۱۶}} = \sqrt{۱۷} \Rightarrow |-۴(\alpha) + ۱(\alpha - ۳) - ۳| = ۱۷ \Rightarrow |-۳\alpha - ۶| = ۱۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳\alpha - ۶ = ۱۷ \Rightarrow \alpha = -\frac{۲۳}{۳} \\ -۳\alpha - ۶ = -۱۷ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۱}{۳} \end{cases}$$

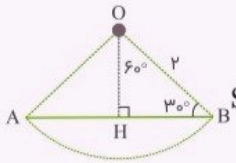
پس دو نقطه به مختصات $A(\frac{۱۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$ و $B(-\frac{۲۳}{۳}, -\frac{۳۲}{۳})$ به فاصلهٔ $\sqrt{۱۷}$ از خط $y - ۴x = ۳$ قرار دارند.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۵

نکته: مساحت قطاعی با زاویهٔ α (برحسب رادیان) در دایره با شعاع r از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}\alpha r^۲$ به دست می‌آید.

داخل مربع، ۴ قطعه دایره با مساحت یکسان قرار دارد. باید مساحت آن‌ها را به دست آوریم. مطابق شکل زیر، ابتدا مساحت قطاع OAB و بعد مساحت مثلث OAB را محاسبه می‌کنیم:



$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲}r^۲.\alpha \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۲^۲ \times \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{۱}{۲}r^۲ \sin ۱۲۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{۴\pi}{۳} - \sqrt{۳}$$

پس مساحت چهار قطعه دایرهٔ داخل مربع، برابر است با:

$$\frac{۱۶\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$$

حال باید طول ضلع مربع را محاسبه کنیم. از شکل بالا به‌سادگی دیده می‌شود:

$$\cos B = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \cos ۳۰^\circ = \frac{BH}{۲} \Rightarrow BH = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AB = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow S_{\text{مربع}} = (۲\sqrt{۳})^۲ = ۱۲$$

پس مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$۱۲ - (\frac{۱۶\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}) = ۱۲ + ۴\sqrt{۳} - \frac{۱۶\pi}{۳}$$

۳۶

$$\overset{\Delta}{OPN} : \tan\alpha = \frac{PN}{OP} = \frac{PN}{۱} \Rightarrow PN = \tan\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{OP}{ON} = \frac{۱}{ON} \Rightarrow ON = \frac{۱}{\cos\alpha}$$

$$\overset{\Delta}{OPM} : \tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{۱} \Rightarrow MP = \cot\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{OP}{OM} = \frac{۱}{OM} \Rightarrow OM = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow PN + PM = ON.OM$$

۳۷

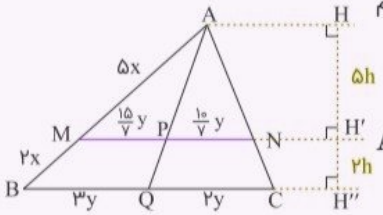
$$\frac{S}{S'} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۲۱}{x} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow x = ۲۴\sqrt{۲}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{P}{P'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۸\sqrt{۲}}{۷} = \frac{P'}{P} = \frac{\text{محیط بزرگ‌تر}}{\text{محیط کوچک‌تر}}$$

۳۸



فرض می‌کنیم $AM = ۵x$، $MB = ۲x$، $BQ = ۳y$ و $QC = ۲y$. ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم. حال طبق قضیهٔ تالس، $\frac{HH'}{H'H''} = \frac{۵}{۲}$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{ABQ} : MP \parallel BQ \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MP}{BQ} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{MP}{۳y} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow MP = \frac{۱۵}{۷}y$$

$$\overset{\Delta}{AQC} : PN \parallel QC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{PN}{QC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{PN}{۲y} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow PN = \frac{۱۰}{۷}y$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱۵}{۷}y)(۵h)}{\frac{۱}{۲}(۵y)(۷h)} = \frac{۱۵}{۴۹}, \quad \frac{S_{\overset{\Delta}{APN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱۰}{۷}y)(۵h)}{\frac{۱}{۲}(۵y)(۷h)} = \frac{۱۰}{۴۹}$$

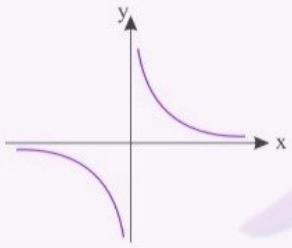
چهارضلعی‌های $MBQP$ و $NCQP$ ذوزنقه‌اند، بنابراین:

$$\frac{S_{MBQP}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۳y + \frac{۱۵}{۷}y)(۲h)}{\frac{۱}{۲}(۵y)(۷h)} = \frac{\frac{۳۶}{۷} \times ۲}{۵ \times ۷} = \frac{۷۲}{۲۴۵}$$

$$\frac{S_{NCQP}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲y + \frac{۱۰}{۷}y)(۲h)}{\frac{۱}{۲}(۵y)(۷h)} = \frac{\frac{۲۴}{۷} \times ۲}{۵ \times ۷} = \frac{۴۸}{۲۴۵}$$

۳۹

می‌دانیم تابع $y = \frac{۱}{x}$ یک‌به‌یک است و نمودار آن به‌صورت زیر می‌باشد:



تابع $f(x) = ۲ - \frac{۱}{x+۱}$ از انتقال و قرینه شدن $y = \frac{۱}{x}$ به دست می‌آید. درنتیجه آن تابع نیز یک‌به‌یک است.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۴۰

$$\frac{۱}{۱+\cot^۲\alpha}=\frac{۱}{۱+\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}}=\frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}=\sin^۲\alpha$$

$$\Rightarrow \text{عبارت}=\sin^۲۱^\circ+\sin^۲۲^\circ+\sin^۲۳^\circ+...+\sin^۲۸۹^\circ$$

$$\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)\Rightarrow \sin^۲۱^\circ+\sin^۲۲^\circ+...+\sin^۲۴۴^\circ+\sin^۲۴۵^\circ+\cos^۲۴۴^\circ+\cos^۲۴۳^\circ+...+\cos^۲۱^\circ$$

$$=(\sin^۲۱^\circ+\cos^۲۱^\circ)+(\sin^۲۲^\circ+\cos^۲۲^\circ)+...+(\sin^۲۴۴^\circ+\cos^۲۴۴^\circ)+\sin^۲۴۵^\circ$$

$$=۱+۱+...+۱+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=(۴۴\times ۱)+\frac{۱}{۲}=۴۴+\frac{۱}{۲}=\frac{۸۹}{۲}$$

۴۱ الف

$$\frac{۲\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{۲(\frac{c}{a})}{\frac{-b}{a}}\Rightarrow\frac{۲c}{-b}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}$$

ب

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

۴۲

$$\tan ۱,\ \cot ۱,\ \tan ۱^{\tan ۱},\ \cot ۱^{\cot ۱},\ \tan ۱^{\cot ۱},\ \cot ۱^{\tan ۱}$$

می‌دانیم کمان ۱ رادیان حدود ۵۷ درجه است، پس داریم:

$$۱\text{rad}>\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{matrix}\tan ۱>۱\\ \cot ۱<۱\end{matrix}$$

درنتیجه اعداد $\tan ۱^{\tan ۱}$ و $\tan ۱^{\cot ۱}$ بزرگ‌تر از یک هستند و اعداد $\cot ۱^{\cot ۱}$ و $\cot ۱^{\tan ۱}$ کوچک‌تر از یک هستند.

$$\tan^{\tan ۱}>\tan ۱>\tan ۱^{\cot ۱}>\cot ۱^{\cot ۱}>\cot ۱>\cot ۱^{\tan ۱}$$

برای درک بهتر، ترتیب بالا را با معادل‌های عددی زیر نمایش می‌دهیم (مقدار $\tan ۱>۱$ را با ۱^+ و همین‌طور اعداد کوچک‌تر از یک را با ۱^- نشان می‌دهیم).

$$(۱^+)^{(۱^+)}>۱^{+(۱)}>(۱^+)^{(۱^-)}>(۱^-)^{(۱^-)}>۱^->(۱^-)^{(۱^+)}$$

نکته: اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بیشتری برسند، کوچک‌تر می‌شوند.

$$(\frac{۱}{۲})^۱=\frac{۱}{۲},\ (\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴},\ (\frac{۱}{۲})^۳=\frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^۱>(\frac{۱}{۲})^۲>(\frac{۱}{۲})^۳$$

۴۳ حاصل‌جمع دو رادیکال فرجهٔ ۲، صفر است، بنابراین هر دوی آن‌ها صفر هستند.

$$\sqrt{x^{۲}-۲x-۳}=۰ \Rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=+۳ \end{cases}$$

حال بررسی می‌کنیم که کدام‌یک در معادلهٔ دوم صدق می‌کند:

$$\begin{cases} x=۳ \Rightarrow x^{۴}-۳x^{۳}-x^{۲}+۹=۰ \Rightarrow ۳^{۴}-۳(۳)^{۳}-۳^{۲}+۹=۰ \ \checkmark \\ x=-۱ \Rightarrow x^{۴}-۳x^{۳}-x^{۲}+۹=۰ \Rightarrow (-۱)^{۴}-۳(-۱)^{۳}-(-۱)^{۲}+۹=۱۲\neq ۰ \end{cases}$$

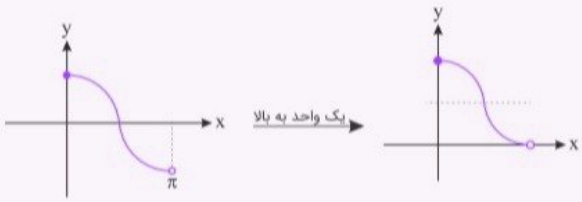
پس این معادله فقط یک جواب دارد. $(x=۳)$

۴۴ چون α یکی از ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده است، پس در معادله صدق می‌کند.

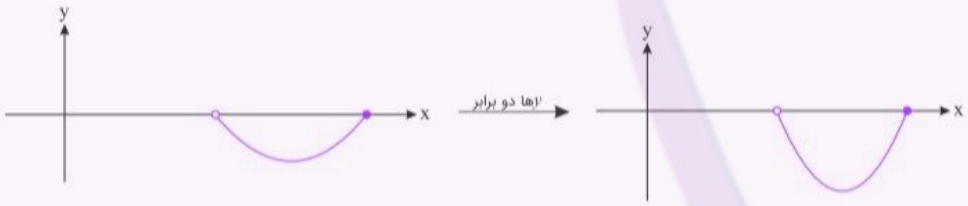
$$\alpha^{۳}-۷\alpha+۴=۰ \Rightarrow \alpha^{۳}-۷\alpha=-۴$$

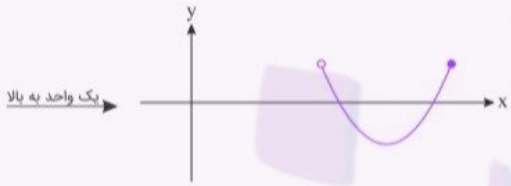
$$-\frac{۴}{\alpha}-\alpha^{۲}=\frac{\alpha^{۳}-۷\alpha}{\alpha}-\alpha^{۲}=\alpha^{۲}-۷-\alpha^{۲}=-۷$$

$$g(x) = \cos x + ۱ \quad ۰ \leq x < \pi$$

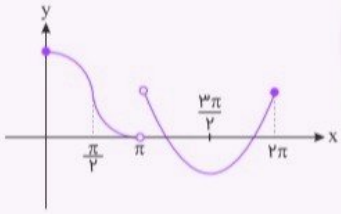


$$h(x) = ۲\sin x + ۱ \quad \pi < x \leq ۲\pi$$





$$f(x) = \begin{cases} \cos x + ۱ & ; ۰ \leq x < \pi \\ ۲\sin x + ۱ & ; \pi < x \leq ۲\pi \end{cases}$$



۴۶ ضابطهٔ سهمی با رأس (xs, ys) به‌صورت $f(x) = a(x - xs)^۲ + ys$ است. در اینجا رأس سهمی، نقطهٔ $(-۱, ۴)$ است، پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $f(x) = a(x + ۱)^۲ + ۴$ است. نقطهٔ $(۰, ۲)$ روی این سهمی است، پس:

$$f(۰) = ۲ \Rightarrow a + ۴ = ۲ \Rightarrow a = -۲$$

درنتیجه ضابطهٔ سهمی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x) = -۲(x + ۱)^۲ + ۴$$

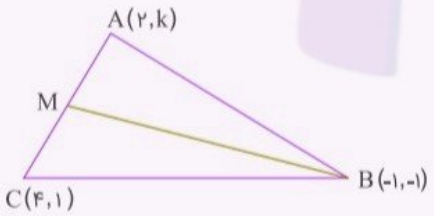
حال معادلهٔ داده شده را حل می‌کنیم:

$$f(x)^۲ + ۱۲f(x) - ۲۸ = ۰$$
$$\Rightarrow (f(x) - ۲)(f(x) + ۱۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲ \\ f(x) = -۱۴ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} f(x) = ۲ \Rightarrow -۲(x + ۱)^۲ + ۴ = ۲ \Rightarrow (x + ۱)^۲ = ۱ \Rightarrow x + ۱ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۲ \end{cases} \\ f(x) = -۱۴ \Rightarrow -۲(x + ۱)^۲ + ۴ = -۱۴ \Rightarrow (x + ۱)^۲ = ۹ \Rightarrow x + ۱ = \pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۴ \end{cases} \end{cases}$$

۴۷ شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$M = (۳, \frac{k + ۱}{۲})$$

فاصلهٔ B تا M باید برابر با ۵ باشد:

$$BM = ۵ \Rightarrow \sqrt{(۳ + ۱)^۲ + (\frac{k + ۱}{۲} + ۱)^۲} = ۵$$
$$\Rightarrow ۱۶ + (\frac{k + ۳}{۲})^۲ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} \frac{k + ۳}{۲} = ۳ \Rightarrow k = ۳ \\ \frac{k + ۳}{۲} = -۳ \Rightarrow k = -۹ \end{cases}$$